XXII Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Marzo 2010

Duración: 4 horas *Cada problema vale 7 puntos*

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO (http://www.mmjp.or.jp/competition/APMO). Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha. No se puede usar calculadora.*

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC \neq 90^{\circ}$. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sea Γ la circunferencia circunscrita del triángulo BOC. Supongamos que Γ interseca al segmento AB en el punto P, distinto de B, y al segmento AC en Q, distinto de C. Sea ON un diámetro de la circunferencia Γ.
Demostrar que el cuadrilátero $APNQ$ es un paralelogramo.

Problema 2. Para cada entero positivo k diremos que un entero es una *potencia k-ésima pura* si se puede expresar como m^k para algún entero m.
Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos distintos tales que su suma es una potencia 2009-ésima pura, y su producto es una potencia 2010-ésima pura.

Problema 3. Sea n un entero positivo. En una fiesta hay n personas. Para cada par de personas de la fiesta, son amigas o no lo son. ¿Cuál es el máximo número posible de pares de personas tales que no son amigas pero tienen un amigo común en la fiesta?

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo que satisface la condición $AB > BC$ y $AC > BC$. Dentamos O y H al circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC, respectivamente. Supongamos que la circunferencia circunscrita del triángulo AHC interseca a la recta AB en M distinto de A, y que la circunferencia circunscrita del triángulo AHB interseca a la recta AC en N distinto de A.
Demostrar que el circuncentro del triángulo MNH pertenece a la recta OH.

Problema 5. Hallar todas las funciones f del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfacen la identidad

$$f(f(x)+f(y)+f(z)) = f(f(x)-f(y)) + f(2xy+f(z)) + 2f(xz-yz).$$